ある種の概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換について(概均質ベクトル空間の展望)

寺西, 鎮男

数理解析研究所講究録
555巻 1985年 93-100

ある種の概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換について

名大・理　寺西鎮男

§1. 概均質ベクトル空間 $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n,\mathbb{C}))$

Gを線型代数群 $\rho: G \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ を Gの表現とする。さらに $B_n(\mathbb{C})$ で上三角行列群 $(\subset GL(n,\mathbb{C}))$ を表わす事にして、$\tilde{G} = G \times B_n(\mathbb{C})$ とおく。以下では、次の様にして、定義される $\tilde{G}$の表現 $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n,\mathbb{C}))$ を考える。

$\tilde{g} = (g, a) \in \tilde{G}$, $x \in M(n,\mathbb{C})$ に対して、

$$\tilde{\rho}(\tilde{g})x = \rho(g)\, x\, a^{-1}$$

とおく。$\tilde{\rho}$の反傾表現を $\tilde{\rho}^*$ とする。

以下では $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n,\mathbb{C}))$ は常に概均質ベクトル空間であると仮定する。

$(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n,\mathbb{C}))$ の既約相対不変式の完全系を $P_0, \cdots, P_k$ (但し $P_0(x) = \det x$) として、対応する指標を $\chi_0, \cdots, \chi_k$ とする。$x \in M(n, \mathbb{C})$ の第 l-番目の、たてベクトルを x^l と書く事にすれば、任意の相対不変式は、各々のたてベクトル x^l $(1 \le l \le n)$ に関して斉次であるので、その斉次次数を λ_l と書く事にする。この時容易にわかるように、

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l$$

である。

$$P_0^*(x) = P_0(x) = \det x, \qquad \chi_0^* = \chi_0$$

$$P_i^*(x) = P_i({}^t x^{-1})\, P_0(x)^{\lambda(i)_1}, \qquad \chi_i^* = \chi_i^{-1}\, \chi_0^{\lambda(i)_1}$$

とおく、但し

$\lambda(i) = (\lambda(i)_1, \cdots, \lambda(i)_n)$ は $P_i(x)$ の斉次次数である。

この時、$P_i^*(x)$ は $(\tilde{G}, \tilde{\rho}^*, M(n,\mathbb{C}))$ の相対不変式の完全系をなし

$$P_i^*(\tilde{\rho}^*(\tilde{g})x) = \chi_i^*(\tilde{g})^{-1} P_i(x) \qquad (0 \le i \le k)$$

をみたす。

$X_\rho(\tilde{G})$: $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n,\mathbb{C}))$ の相対不変式の有理指標全体のなる群とすると $X_\rho(\tilde{G})$ は χ_0,

$\chi_1, \cdots, \chi_k$ で生成される、自由アーベル群である。任意の $\chi \in X_\rho(\tilde{G})$ に対して

$$\chi = \prod_{i=0}^{k} \chi_i^{\delta(\chi)_i} = \prod_{i=0}^{k} \chi_i^{*\,\delta^*(\chi)_i}$$

$$P_\chi = \prod_{i=0}^{k} P_i^{\delta(\chi)_i}, \qquad P^*_{\chi^*} = \prod_{i=0}^{k} P_i^{*\,\delta^*(\chi)_i}$$

とおく。さらに $s = (s_0, \cdots, s_k) \in \mathbb{C}^{k+1}$ に対して、

$$\begin{cases} \lambda_\ell(s) = \sum_{i=0}^{k} s_i \, \lambda(i)_\ell \\ \lambda^*_\ell(s) = s_0 + \sum_{i=1}^{k} s_i \left(\lambda(i)_1 - \lambda(i)_\ell \right) \qquad (1 \leq \ell \leq n) \end{cases}$$

として、$\gamma(s)$, $\gamma^*(s)$ を

$$\begin{cases} \gamma(s) = \prod_{\ell=1}^{n} \Gamma(\lambda_\ell(s) + n - \ell + 1) \\ \gamma^*(s) = \prod_{\ell=1}^{n} \Gamma(\lambda^*_\ell(s) + n - \ell + 1) \end{cases}$$

($\Gamma(x)$ はガンマ函数)

により定義する。

この時 $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$ の b-函数は、

$$b_\chi(s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(s - \delta(\chi))}$$ によって与えられる。

§2. Fourier 変換

以下では. G は $\mathbb{R}$ 上定義されていると仮定する.
S, S^* をそれぞれ, $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$, $(\tilde{G}, \tilde{\rho}^*, M(n,\mathbb{C}))$ の singular set とする.

$$\tilde{G}_{\mathbb{R}} = G \times B_n(\mathbb{R})$$

$$S_{\mathbb{R}} = S \cap M(n, \mathbb{R})$$

$$S_{\mathbb{R}}^* = S^* \cap M(n, \mathbb{R})$$

$$\tilde{\rho}_{\mathbb{R}} = \tilde{\rho}\,|_{\tilde{G}_{\mathbb{R}}}$$

とおいて, 次の条件 (1)〜(3) を仮定する.

(1) $\rho(\tilde{G}_{\mathbb{R}})$ は $GL(n, \mathbb{R})$ の連結部分群

(2) $S = \cup S_i$

$$S_i = \{ x \in M(n, \mathbb{R}),\ P_i(x) = 0 \} \quad (0 \le i \le k)$$

(3) $M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}}$ は single $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}(\tilde{G}_{\mathbb{R}})$ - orbit

$\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ の連結成分を $\tilde{G}_{\mathbb{R}}^{\circ}$ として $M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}}$ の $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}(\tilde{G}_{\mathbb{R}}^{\circ})$ による分解

$$M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu$$

を考える。 $V_i^* = \{ x \in M(n, \mathbb{R})\ ;\ {}^t x^{-1} \in V_i \}$ とすると

$$M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}}^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_\nu^*$$

が $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}^*(\tilde{G}_{\mathbb{R}}^{\circ})$ による orbit 分解である。

$s=(s_0,\cdots,s_k)\in\mathbb{C}^{k+1}$ に対して，

$$|P(x)|^s=\prod_{i=0}^{k}|P_i(x)|^{s_i},\quad |P^*(x)|^s=\prod_{i=0}^{k}|P_i^*(x)|^{s_i}$$

$$|\chi(g)|^s=\prod_{i=0}^{k}|\chi_i(g)|^{s_i},\quad |\chi^*(g)|^s=\prod_{i=0}^{k}|\chi_i^*(g)|^{s_i}$$

とおく．

次の積分を考える：

$$\Phi_i(f,s)=\int_{V_i} f(x)\,|P(x)|^s\,dx$$

$$\Phi_i^*(f,s)=\int_{V_i^*} f(x)\,|P^*(x)|^s\,dx \qquad (1\le i\le \nu)$$

$$f\in\mathcal{S}(M(n,\mathbb{R})).$$

$\mathrm{Re}\,s_0>0,\cdots,\mathrm{Re}\,s_k>0$ の時，$\Phi_i(f,s)$，$\Phi_i^*(f,s)$ は絶対収束する．

$1\le i\le\nu$ に対して，

$\varepsilon_i^*=(\mathrm{sgn}\,P_0^*|_{V_i},\cdots\ \mathrm{sgn}\,P_k^*|_{V_i})$ とおく．更に

$$\varepsilon_i(s)=\exp 2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{4}\sum_{\ell=0}^{k}s_\ell(1-\varepsilon_i(\chi_\ell))\right)$$

$$d(s)=\sum_{\ell=0}^{k}s_\ell\deg P_\ell \qquad (\text{但し，}\ \varepsilon_i(\chi_\ell)=\mathrm{sgn}\,P_\ell|_{V_i})$$

とする．　$\chi\in X_\rho(\tilde{G})$ に対して

$\sigma_i(\chi)f(s)=\varepsilon_i(\chi)\,f(s+\delta(\chi))$ とおく．

<u>定理</u>: すべての p, q $(p \neq q,\ 1 \leq p, q \leq \nu)$ に対して, $\varepsilon_p^* \neq \varepsilon_q^*$ と仮定すると $\Phi_i(f, s)$, $\Phi_i^*(f, s)$ は, 次の函数等式を満足する.

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(\hat{f}, s-(n, 0, \cdots, 0)) \\ \vdots \\ \Phi_\nu(\hat{f}, s-(n, 0 \cdots 0)) \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(s-(n, 0, \cdots 0))\, C(s) \begin{pmatrix} \Phi_1^*(f, s^*) \\ \vdots \\ \Phi_\nu^*(f, s^*) \end{pmatrix}$$

ここで, $C(s)$ はその (i, j)-成分 $C_{ij}(s)$ が

$$C_{ij}(s) = (-2)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2} - d(s)} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{2} d(s)\right) \varepsilon_i(s)$$

$$\times \prod_{r=0}^{k} (1 + \sigma_j(\chi_r)) \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2} d(s)\right) \varepsilon_i(-s) \prod_{\ell=1}^{n} \sin\frac{\pi}{2}(\lambda_\ell(s) - \ell)$$

で与えられる $\nu \times \nu$-行列である.

<u>Example</u> として, $G = SO(n, \mathbb{C})$ とする. この時, 相対不変式の基本系は

$$P_0(X) = \det X$$

$$P_i(x) = \det \begin{bmatrix} (x^1, x^1), & \cdots, & (x^1, x^i) \\ & \vdots & \\ (x^i, x^1), & \cdots, & (x^i, x^i) \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

で与えられる。この時

$$S = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_i , \qquad S_i = \{ x \in M(n, \mathbb{C}) , \ P_i(x) = 0 \}$$

で $M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}}$ の orbit 分解は

$$M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 = \{ x \in M(n, \mathbb{R}) \setminus S_{\mathbb{R}} \ ; \ \det x > 0 \}$$

$$V_2 = \{ x \in M(n, \mathbb{R}) \setminus S_{\mathbb{R}} \ ; \ \det x < 0 \}$$

である。

$s = (s_0, \cdots, s_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$d(s) = n s_0 + \sum_{\ell=1}^{n-1} 2 \ell s_\ell$$

$$\lambda_\ell(s) = s_0 + \sum_{m=\ell}^{n} 2 m s_m \qquad (1 \leq \ell \leq n)$$

$$\varepsilon_i(s) = \exp \frac{\pi\sqrt{-1} (1 - (-1)^{i-1}) s_0}{2} \qquad (i = 1, 2)$$

となるので $c_{ij}(s)$, $(1 \leq i, j \leq 2)$ は

$$c_{ij}(s) = 2^{n-1} (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2} - d(s)} \Bigl(\prod_{\ell=1}^{n} \cos \frac{\pi}{2} (\lambda_\ell(s) - \ell + 1)$$

$$+ (-1)^{i+j} (\sqrt{-1})^n \Bigr) \prod_{\ell=1}^{n} \sin \frac{\pi}{2} (\lambda_\ell(s) - \ell + 1)$$

で与えられる。

従って、 $i=1,2$ に対して、

$$\Phi_i(\hat{f}, s-(n,0,\cdots,0)) = \prod_{l=1}^{n} \Gamma\Big(s_0 + \sum_{m=l}^{n} 2m s_m - l + 1\Big) \times \sum_{j=1}^{2} C_{ij}(s)\, \Phi_j(f, s^*)$$

但し、 $s^* = (-s_0 - \sum_{m=1}^{n} 2m s_m, s_2, \cdots, s_{n-1})$

を得る。

証明等は、

Y. Teranishi : Rerative invariants and b-functions of prehomogeneous vector spaces $(G \times GL(d_1, \cdots, d_r), \tilde{\rho}_1, M(n,\mathbb{C}))$ (preprint)

" : The functional equation of zeta distributions associated with prehomogeneous vector spaces (preprint)